Série 5 –Dynamique des fluides parfaits

Exercice N°1

4.1 On se place dans le référentiel du sous-marin et l'eau s'écoule autour de lui. Considérons la ligne de courant MA. Le point A est un point d'arrêt où la ligne de courant va se diviser pour suivre le profil du sous-marin. Donc la vitesse au point A est nulle. Comme, d'autre part, les points A et M sont à la même altitude, l'écriture de la relation de Bernoulli entre les points A et M conduit à :

$$P_M + \frac{1}{2}\rho U_M^2 = P_A$$

La pression au point *M* est obtenue par application de la relation de l'hydrostatique :

$$P_M = P_0 + \rho g z_M$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient finalement :

$$P_A = P_0 + \rho g z_M + \frac{1}{2}\rho U_M^2$$

L'application numérique donne : $P_A = 3{,}1\,\text{bar}$.

Exercice N°2

4.2 Considérons la ligne de courant joignant les points M et A et appliquons la relation de Bernoulli entre ces 2 points :

$$P_M + \rho g z_M + \cancel{\frac{1}{2}\rho U_M^2} = P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 \qquad (4.48)$$

Le réservoir est de très grandes dimensions devant l'orifice d'évacuation de l'eau et nous pouvons donc supposer que la vitesse du point M est très petite devant celle de A. D'autre part, le point M étant sur la surface libre, la pression y est égale à la pression atmosphérique : $P_M = P_{atm}$ et au point A l'écoulement dans l'air ambiant étant à droites parallèles la pression e 'a pression atmosphérique : $P_A = P_{atm}$.
On en dédui ation (4.48) conduit à :

$$U_A = \sqrt{2 g z_M}$$

Cette relation constitue la formule de *Toricelli*. Notons bien que la hauteur z_M dépend bien du temps puisque le niveau de la surface libre diminue au fur et à mesure que le liquide s'écoule.

Pour calculer le temps de vidange de la cuve, nous calculons dans un premier temps le débit volume au niveau de l'orifice de sortie :

$$Q_v = U_A s = s\sqrt{2 g z_M(t)} \qquad (4.49)$$

Comme l'écoulement est incompressible, il y a conservation du débit et son calcul à partir de la section de la cuve conduit avec la relation (4.49) à :

$$Q_v = s\sqrt{2 g z_M(t)} = U_M S = -\frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t} S$$

Nous intégrons la relation précédente depuis l'instant initial jusqu'à l'instant T où la cuve est complètement vide ($z_M = 0$) :

$$\int_{z_M}^{0} -\frac{\mathrm{d}z_M}{\sqrt{z_M(t)}} = \int_{0}^{T} -\frac{s\sqrt{2g}}{\mathrm{S}}\mathrm{d}t$$

Ce calcul conduit à :

$$-2\sqrt{z_M(t)} = -\frac{s\sqrt{2g}}{\mathrm{S}} T$$

D'où l'expression du temps total de vidange :

$$T = \frac{2\sqrt{z_M(t)}\,\mathrm{S}}{s\sqrt{2g}}$$

Application numérique : T~1h 46 mn 25 s.

Exercice N°3

4.3 Considérons la ligne de courant joignant les points A et B. Il n'y a pas conservation de l'énergie sur cette ligne de courant étant donné que le fluide a communiqué du travail à la turbine. Ceci implique que la relation de Bernoulli s'écrive :

$$\left[\frac{P_A}{\rho g}+z_A+\frac{1}{2g}U_A^2\right]-\left[\frac{P_B}{\rho g}+z_B+\frac{1}{2g}U_B^2\right]=H_T$$

Dans cette relation H_T désigne l'énergie perdue entre les points A et B et exprimée en hauteur de fluide. Calculons les vitesses aux points A et B :

$$U_A=\frac{4Q_v}{\pi d_A^2}=3{,}027\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$U_B=\frac{4Q_v}{\pi d_B^2}=0{,}756\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

On en déduit :

$$H_T=20\,\mathrm{m}$$

La puissance reçue par la turbine s'exprime enfin comme :

$$P_T=\rho g Q_v H_T$$

L'application numérique conduisant à : $P_T=41{,}96\,\mathrm{kW}$.

Exercice N°4

4.4 La démarche est très comparable à celle de l'exercice précédent, la différence étant que de l'énergie est fournie par la pompe au fluide. Ainsi si l'on considère la ligne de courant passant par les points 1 et 2, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$-\left[\frac{P_1}{\rho g}+z_1+\frac{1}{2g}U_1^2\right]+\left[\frac{P_2}{\rho g}+z_2+\frac{1}{2g}U_2^2\right]=H_P \qquad (4.50)$$

Or, 20 cm de mercure correspondent à une élévation de 2,72 m d'eau (en effet, $h_{\text{eau}} = h_{Hg}\,\rho_{Hg}/\rho_{\text{eau}}$), donc nous pouvons exprimer les pressions aux points 1 et 2 en bars :

$$P_1 = P_0 - \rho_{eau}\, g\, h_{eau}^1 = 0{,}73 \text{ bar}$$

$$P_2 = P_0 + \rho_{eau}\, g\, h_{eau}^2 = 1{,}68 \text{ bar}$$

Calculons les vitesses aux points 1 et 2 :

$$U_1 = \frac{4Q_v}{\pi d_1^2} = 2{,}12\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

$$U_2 = \frac{4Q_v}{\pi d_2^2} = 4{,}77\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

En remplaçant ces valeurs dans la relation (4.50), on obtient : $H_P = 11{,}8$ m.
La puissance nécessaire pour le fonctionnement de la pompe est :

$$P_P = \rho g Q_v H_P = 17{,}36 \text{ kW}$$

La prise en compte du rendement de la pompe conduit finalement à la puissance mécanique : $P_{méca} = P_P / \eta = 21{,}7$ kW.

Exercice N°5

4.5

1. Écrivons la relation de *Bernoulli* sur la ligne de courant joignant les points A et B :

$$\left[\frac{P_A}{\rho g}+z_A+\frac{1}{2g}U_A^2\right]-\left[\frac{P_B}{\rho g}+z_B+\frac{1}{2g}U_B^2\right]=0 \qquad (4.51)$$

A étant un point d'arrêt sa vitesse est nulle et d'autre part, on peut faire l'hypothèse que les 2 points sont sensiblement à la même altitude puisque nous considérons un diamètre du tube petit. Ainsi la relation (4.51) devient :

$$P_A - P_B = \frac{\rho}{2} U_B^2$$

2a. La relation de l'hydrostatique permet de lier les pressions aux points M et N :

$$P_M + \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, z_M = P_N + \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, z_N$$

Soit, comme $P_M - P_N = P_A - P_B$:

$$P_A - P_B = \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, \Delta h \qquad (4.52)$$

2b. En utilisant la relation (4.52), on trouve

$$\rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, \Delta h = \frac{\rho}{2} U_B^2$$

D'où l'expression de la vitesse au point B :

$$U_B = \sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{Hg}}}{\rho} 2\, g\, \Delta h}$$

Application numérique : $U_B = 46{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Exercice N°6

Example. 6.7 ***Determine the flow rate*** *through the siphon Fig. Ex. 6.7 when flow is established. Also determine the pressure at A.*

The pressure at C and B are atmospheric. Considering locations C and B and taking the datum at B, applying Bernoulli equation, noting that the velocity at water surface at C = 0.

$$0 + 0 + V_B^2/2g = 3 + 0 + 0$$

$$\therefore \quad V_B = 7.672 \text{ m/s.}$$

$$\therefore \quad \textbf{Flow rate} = (\pi D^2/4) \times V$$

$$= (\pi \times 0.1^2/4) \times 7.672$$

$$= \mathbf{0.06\ m^3/s}$$

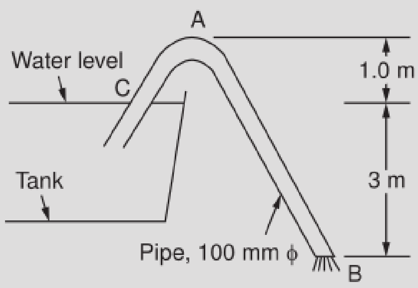


Figure Ex. 6.7 Problem model

The velocity at A is the same as velocity at B. Now considering locations C and A,

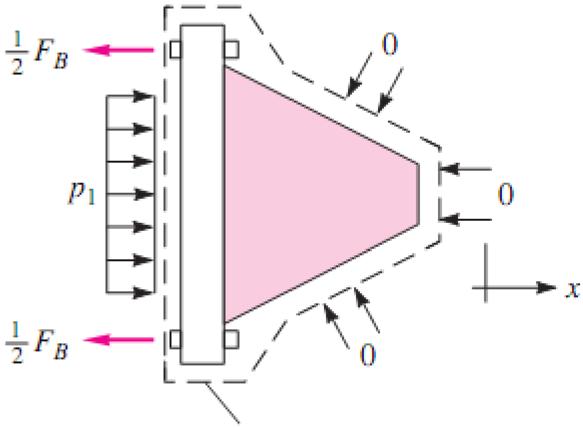
$$3 + 0 + 0 = 4 + (P_A/\gamma) + 7.672^2/(2 \times 9.81)$$

$\therefore$ $P_A/\gamma = -4$m or -4m of water head or 4m water-head below atmospheric pressure.

Check: Consider points A and B

$$4 + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{V_B^2}{2g} + 0 + 0 \quad \text{as } V_A = V_B, \quad \frac{\mathbf{P_A}}{\gamma} = \mathbf{-4\ m} \text{ checks.}$$

Exercice N°7



(b)

The flow from 1 to 2 is a constriction exactly similar in effect to the venturi in Example 3.15, for which Eq. (1) gave

$$p_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) \qquad (1)$$

The velocities are found from the known flow rate $Q = 1.5\ \text{m}^3/\text{min}$ or $0.025\ \text{m}^3/\text{s}$:

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.025\ \text{m}^3/\text{s}}{(\pi/4)(0.03\ \text{m})^2} = 35.4\ \text{m/s}$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.025\ \text{m}^3/\text{s}}{(\pi/4)(0.1\ \text{m})^2} = 3.2\ \text{m/s}$$

We are given $p_2 = p_a = 0$ gage pressure. Then Eq. (1) becomes

$$p_1 = \tfrac{1}{2}(1000\ \text{kg/m}^3)[(35.4^2 - 3.2^2)\text{m}^2/\text{s}^2]$$
$$= 620{,}000\ \text{kg/(m}\cdot\text{s}^2) = 620{,}000\ \text{Pa gage}$$

The control volume force balance is shown in Fig. E3.16*b*:

$$\sum F_x = -F_B + p_1A_1$$

and the zero gage pressure on all other surfaces contributes no force. The x-momentum flux is $+\dot{m}V_2$ at the outlet and $-\dot{m}V_1$ at the inlet. The steady flow momentum relation (3.40) thus gives

$$-F_B + p_1A_1 = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

or

$$F_B = p_1A_1 - \dot{m}(V_2 - V_1) \qquad (2)$$

Substituting the given numerical values, we find

$$\dot{m} = \rho Q = (1000\ \text{kg/m}^3)(0.025\ \text{m}^3/\text{s}) = 25\ \text{kg/s}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4}D_1^2 = \frac{\pi}{4}(0.1\ \text{m})^2 = 0.00785\ \text{m}^2$$

$$F_B = (620{,}000\ \text{N/m}^2)(0.00785\ \text{m}^2) - (25\ \text{kg/s})[(35.4 - 3.2)\text{m/s}]$$
$$= 4872\ \text{N} - 805\ (\text{kg}\cdot\text{m})/\text{s}^2 = 4067\ \text{N}\ (915\ \text{lbf}) \qquad \textit{Ans.}$$

Exercice N°8

For convenience the control volume should be chosen such that the inlet and outlet areas are normal to the velocities at these sections. In this case the force on the bend is required. It is convenient to calculate the forces in the x and y directions separately.

$$u_1 = 12 \text{ m/s} \quad \therefore \quad u_2 = 24 \text{ m/s}$$

Mass flow $= 12 \times 1.2 \times 1000 = 14.4 \times 10^3$ kg/s

Using equations (13.1.7) and (13.1.8)

$$F_x = P_1A_1 - P_2A_2 \cos\theta - \dot{m}\,(V_2 \cos\theta - V_1)$$

$$F_y = P_2A_2 \sin\theta + \dot{m}\, V_2 \sin\theta$$

Substituting the values, Force m the fluid is

$$\mathbf{F_x} = 40 \times 10^3 \times 1.2 - 30 \times 10^3 \times 0.6 \times \cos 45 - 14.4 \times 10^3\,(24 \cos 45 - 12)$$

$$= \mathbf{-\ 36.3\ kN.}\quad \textbf{in the –ve } \boldsymbol{x} \text{ direction}$$

$$\mathbf{F_y} = 30 \times 10^3 \times 0.6 \times \sin 45 + 14.4 \times 10^3 \times 24 \times \sin 25$$

$$= \mathbf{257.1\ kN} \quad \textbf{in the +ve y direction.}$$

The forces on the bend will be 36.3 kN along x and 257.1 kN downwards.

The resultant is $\sqrt{257.1^2 + (-36.3)^2}$ = **259.65 N.**

The direction is $\theta = \tan^{-1} \dfrac{36.3}{257.1} = \mathbf{8.04°}$

with the negative y direction

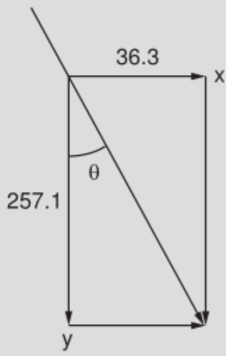


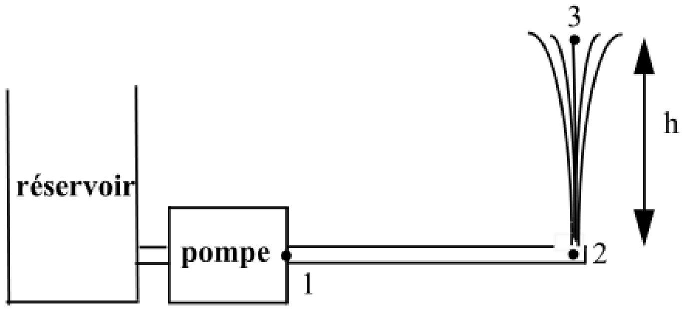
Figure Ex. 13.2

Exercice N°9

L'eau est considérée comme un fluide parfait incompressible. L'équation de Bernoulli est alors applicable et s'écrit:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte$$

En l'appliquant à une ligne de courant allant de 1 à 3 via 2, on obtient:



$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 = p_3 + \rho g z_3 + \frac{1}{2}\rho {v_3}^2 \quad (1)$$

Ici: $z_1 = z_2 = 0$, $z_3 = h$, $v_1 \cong 0$, $v_3 = 0$, $p_2 = p_3 = p_{atm}$

Calcul de la pression

Utilisons l'équation de Bernoulli entre les points 1 et 3:

$$p_1 = p_{atm} + \rho g h \Rightarrow p_1 = 16.3\ 10^5 Pa = 16.3 bar$$

Calcul du débit

Utilisons l'équation 1de Bernoulli entre les points 1 et 2:

$$p_1 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_{atm})}{\rho}} = 55.3 m/s$$

La vitesse étant constante sur une section de la conduite (fluide parfait), le débit dans la conduite est donné par:

$$Q = v_2 S_2 = 0.49\, m^3/s$$

Calcul de la puissance hydraulique

Par définition, la puissance P s'écrit: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = pS \cdot v = p \cdot Q$

La pression à l'entrée de la machine valant p_{atm} (eau provenant du réservoir) on obtient:

$$P = (p_1 - p_{atm})Q = 761 kW$$

<u>Remarque</u>: Ce problème décrit le jet d'eau de Genève. Le jet ne s'élève que de 130 mètres environ, la différence étant due aux frottements de l'air.